



DOI: <https://doi.org/10.15688/nsr.jvolsu.2023.3.3>

UDC 57.033:574.42

LBC 28.534.2

A SYSTEMATIC APPROACH TO THE MODEL OF TREE GROWTH IN THE FOREST BASED ON THE BERTALANFFY EQUATION

Tofik I. Suleymanov

National Aerospace Agency, Baku, Azerbaijan

Hikmet H. Asadov

National Aerospace Agency, Baku, Azerbaijan

Tabriz M. Tahmazov

National Aerospace Agency, Baku, Azerbaijan

Abstract. A universal, systematic approach has led to the identification of such indicators as the speed of the process of death and the development of forests. These forest indicators naturally depend on the type of trees in the forest, their state of health, as well as the degree of environmental impact. In forestry, there is a single generalized model of the growth and death of trees in the form of a growth model. The development model proposed by Von Bertalanffy is also known in relation to any growth indicator, mainly the diameter of the tree. The article is devoted to the issues of a systematic approach to the process of tree growth using the Bertalanffy growth model. The aim of the study was to find a relationship between the diameter and height of trees at which the target functional, compiled on the basis of the Bertalanffy model, reaches a maximum with some improvement. The improvement of the model is carried out as follows: a generalized indicator P , defined as the product of the diameter and height of the tree, is introduced for consideration. In general, this indicator determines the longitudinal section of trees and may be useful in forestry. On the other hand, a similar indicator, the product of $D^2 \cdot H$, is widely used in calculating biomass in trees, which indicates that the introduced indicator is sufficiently informative. Some restrictive conditions are assumed for the desired function of the relationship between the diameter and height of trees. To find the optimal ratio between these two indicators, a target function containing the desired function is formed on the basis of the Bertalanffy model. The problem of unconditional variational optimization is formulated and solved, as a result of which the optimal type of the desired function is calculated at which the target functional reaches a maximum.

Key words: Bertalanffy model, optimization, system approach, cross-sectional diameter, tree height.

Citation. Suleymanov T.I., Asadov H.H., Tahmazov T.M. A Systematic Approach to the Model of Tree Growth in the Forest Based on the Bertalanffy Equation. *Prirodnye sistemy i resursy* [Natural Systems and Resources], 2023, vol. 13, no. 3, pp. 21-26. (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.15688/nsr.jvolsu.2023.3.3>

УДК 57.033:574.42

ББК 28.534.2

СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД К МОДЕЛИ РОСТА ДЕРЕВЬЕВ В ЛЕСУ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЯ БЕРТАЛАНФФИ

Тофиг Ибрагим оглы Сулейманов

Национальное аэрокосмическое агентство, г. Баку, Азербайджан

Хикмет Гамид оглы Асадов

Национальное аэрокосмическое агентство, г. Баку, Азербайджан

Табриз Мубариз оглы Тахмазов

Национальное аэрокосмическое агентство, г. Баку, Азербайджан

Аннотация. Универсальный системный подход привел к выделению таких показателей, как скорости процесса гибели и развития лесов. Указанные показатели леса естественным образом зависят от типа деревьев в лесу, состояния их здоровья, а также от степени воздействия окружающей среды. В лесоведении существует единая обобщенная модель роста и гибели деревьев в виде модели роста. Также известна модель развития предложенная Фон Бергаланффи, применительно к какому-либо показателю роста, преимущественно к диаметру дерева. Статья посвящена вопросам системного подхода к процессу роста деревьев с применением модели роста Бергаланффи. Целью исследования являлся нахождение такой взаимосвязи между диаметром и высотой деревьев, при которой целевой функционал, составленный на базе модели Бергаланффи, с некоторым усовершенствованием достигает максимума. Усовершенствование модели осуществлено следующим образом. Введено на рассмотрение обобщенный показатель P , определяемый в качестве произведения диаметра и высоты дерева. В целом этот показатель определяет продольное сечение деревьев и может оказаться полезным в лесотехническом хозяйстве. С другой стороны, похожий показатель-произведение $D^2 \cdot H$ широко используется при вычислениях биомассы в деревьях, что указывает достаточную информативность введенного показателя, принимается некоторое ограничительное условия на искомую функцию взаимосвязи диаметра и высоты деревьев. Для нахождения оптимального соотношения между этими двумя показателями на базе модели Бергаланффи сформирован целевой функционал, содержащий искомую функцию. Составлена и решена задача безусловной вариационной оптимизации, в результате чего вычислена оптимальный вид искомой функции, при которой целевой функционал достигает максимума.

Ключевые слова: модель Бергаланффи, оптимизация, системный подход, диаметр поперечного сечения, высота дерева.

Цитирование. Сулейманов Т. И., Асадов Х. Г., Тахмазов Т. М. Системный подход к модели роста деревьев в лесу на основе уравнения Бергаланффи // Природные системы и ресурсы. – 2023. – Т. 13, № 3. – С. 21–26. – DOI: <https://doi.org/10.15688/nsr.jvolsu.2023.3.3>

Введение. Понятие системы прочно вошло во все сферы человеческой деятельности, в том числе в науку. На данный момент система не только выступает теоретическим аспектом, но и становится главным элементом в некоторых областях прикладной науки. Системный подход к процессу развития лесов привело к выделению таких показателей развития лесов как скорости процесса гибели и развития (роста) лесов. Указанные показатели леса естественным образом зависят от типа деревьев в лесу, состояния их здоровья и воздействующей окружающей среды [1; 5; 6; 8]. Вместе с тем существует единая обобщенная модель роста и гибели деревьев в виде [2]:

$$m(D) = \psi \cdot g(D) - g'(D), \quad (1)$$

где $g'(D) = \frac{dg(D)}{dD}$; $g(D)$ – функция роста диаметра дерева; $m(D)$ – функция гибели диаметра дерева; D – диаметр дерева.

Также существует модель роста, предложенная Фон Бергаланффи, применительно к какому-либо показателю развития у [10]. Применительно к диаметру дерева модель Фон Бергаланффи имеет вид:

$$\frac{dD}{dt} = \eta D^m - kD, \quad (2)$$

где t – возраст дерева; n, k, m – параметры модели, постоянные величины.

Вместе с тем диаметр деревьев не является единственным главенствующим параметром, показывающим степень развития деревьев. Не менее важным аллометрическим показателем процесса роста деревьев является высота деревьев. При этом между показателями диаметра деревьев и их высотой существует определенная связь.

Как отмечается в [7], традиционно указанная взаимосвязь моделируется линейными уравнениями. В качестве примера на рисунке 1, a, b приведены скаттерограммы, которые могут быть аппроксимированы линейными и нелинейными регрессионными уравнениями.

Отметим во многих работах (см. например [4; 7]) приводятся сложные экспоненциальные регрессионные уравнения зависимости $h = f(D)$. Вместе с тем существуют работы, в которых исследована обратная зависимость, то есть регрессионная связь:

$$D = \varphi(h). \quad (3)$$

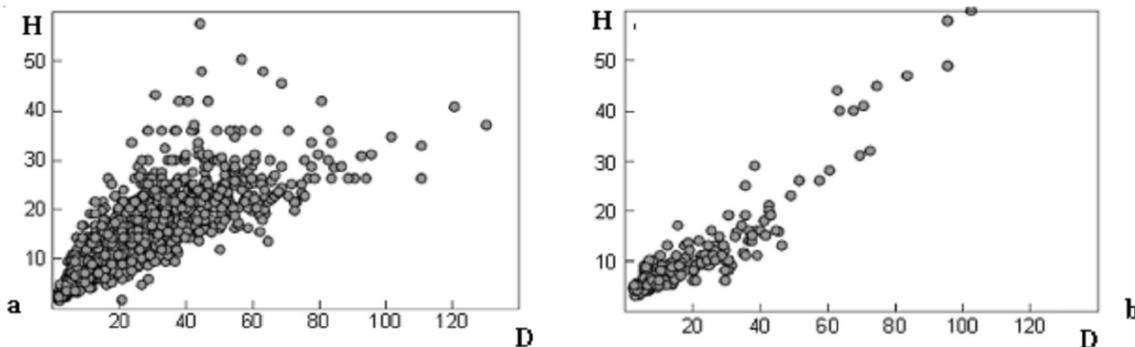


Рис. 1. Скатерограммы статической зависимости h от D :

a – аппроксимированные нелинейными регрессионными уравнениями;

b – аппроксимированные нелинейными регрессионными уравнениями

Примечание. Источник: [7].

Например, согласно работе [3], такая статистическая связь может быть охарактеризована квазилинейным регрессионным уравнением (рис. 2).

С учетом вышеизложенного в настоящей статье ставится задача вычисления наилучшей связи между указанными параметрами с привлечением модели роста Л.Ф. Берталанффи.

Материалы и методы

Введем на рассмотрение обобщенный показатель P , определяемый как

$$P = D \cdot H. \quad (4)$$

В целом показатель (4) определяет продольное сечение деревьев и может оказаться полезным в лесотехническом хозяйстве. С другой стороны, произведение $D^2 \cdot H$ ши-

роко используется при вычислениях биомассы в деревьях, что указывает достаточную информативность введенного показателя P . В этом случае для показателя P можно написать модель Берталанффи:

$$\frac{dP}{dt} = \eta P^m - kP. \quad (5)$$

Вместе с тем с учетом (4) имеем:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dD}{dt} \cdot H + D \cdot \frac{dH}{dt}. \quad (6)$$

Эквивалентная степень важности показателей P , D , H приводит к мысли о том, что процесс роста может быть исследован с использованием составляющих $\left(\frac{dD}{dt}\right) \cdot H$ или $\left(\frac{dH}{dt}\right) \cdot D$ взамен $\frac{dP}{dt}$. Далее для определенности выберем первую составляющую, то есть

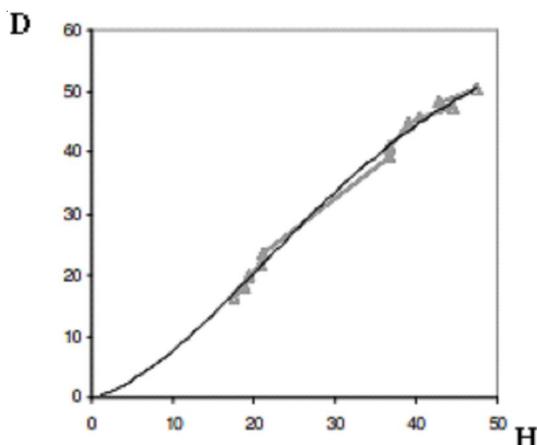


Рис. 2. Квазилинейная регрессионная линия взаимосвязи $D = \varphi(h)$

Примечание. Источник: [3].

$\kappa = \left(\frac{dD}{dt}\right) \cdot H$. В этом случае с учетом (2) и (6) получим:

$$H \cdot \left(\frac{dD}{dt}\right) = H \cdot \eta \cdot D^m - H \cdot kD. \quad (7)$$

Очевидно, что (7) повторяет модель Бер-таланффи (2). Далее авторами предлагается следующее усовершенствование этой модели:

1. Учитываем связь между D и H в виде функции:

$$D = D(H).$$

2. К выбору функции $D(H)$ налагается некоторое ограничительное условие, позволяющее несколько сузить пространство непрерывных дважды дифференцируемых функций.

Указанное ограничение имеет вид:

$$\int_0^{H_{\max}} D(H) dH = C; C = const. \quad (8)$$

На основе (7) сформируем функционал оптимизации в виде:

$$\int_0^{H_{\max}} [H\eta D(H)^m - H \cdot kD(H)] dH. \quad (9)$$

С учетом (8) и (9) сформируем полный функционал F безусловной вариационной оптимизации:

$$F = \int_0^{H_{\max}} [H\eta D(H)^m - H \cdot kD(H)] dH + \lambda \left[\int_0^{H_{\max}} D(H) dH - C \right], \quad (10)$$

где λ – множитель Лагранжа.

Решение задачи (10) в соответствии с методом Эйлера должна удовлетворить следующему условию:

$$\frac{d\{H\eta D(H)^m - H \cdot kD(H) + \lambda D(H)\}}{d[D(H)]} = 0. \quad (11)$$

Из условия (11) получим:

$$mH\eta D(H)^{m-1} - Hk + \lambda = 0. \quad (12)$$

Из (12) получаем:

$$D(H) = \sqrt[m-1]{\frac{Hk - \lambda}{mH\eta}}. \quad (13)$$

Согласно оценкам, приведенным [9], для многих видов деревьев $m \ll 1$. Следовательно, выражение (13) может быть представлено как:

$$D(H) = \left(\frac{mH\eta}{Hk - \lambda}\right)^{\frac{1}{m-1}}. \quad (14)$$

Как видно из выражения (14) рост H в оптимальном случае должен привести к уменьшению D , что вполне соответствует обычным представлениям о процессе роста деревьев.

Результаты и обсуждение

Что касается самого оцениваемого процесса, то есть в данном случае интегральной величины:

$$\varepsilon = \int_0^{H_{\max}} k dH, \quad (15)$$

то эта величина при решении (14) достигает максимума, так как повторная производная (12) по искомой функции оказывается отрицательной величиной. Для вычисления значения множителя Лагранжа λ следует вставить выражение (14) в ограничительное условие (8) и, осуществив интегрирование, вычислить величину λ .

Следует отметить, что факт уменьшения функции роста при увеличении диаметра дерева в гомогенных лесах хорошо известно. В качестве примера на рисунке 3 приведены кривые зависимости количества деревьев от диаметра этих деревьев [2].

Проведенное исследование показало, что принятый общий показатель развития при этом оказывается экстремальной величиной, экстремум которой зависит от типа взаимосвязи диаметра деревьев и параметров модели Фон Берталанффи.

Заключение

Целью исследования являлось нахождение такой взаимосвязи между диаметром и высотой деревьев, при которой целевой функционал, составленный на базе модели Бер-таланффи, с некоторым усовершенствованием

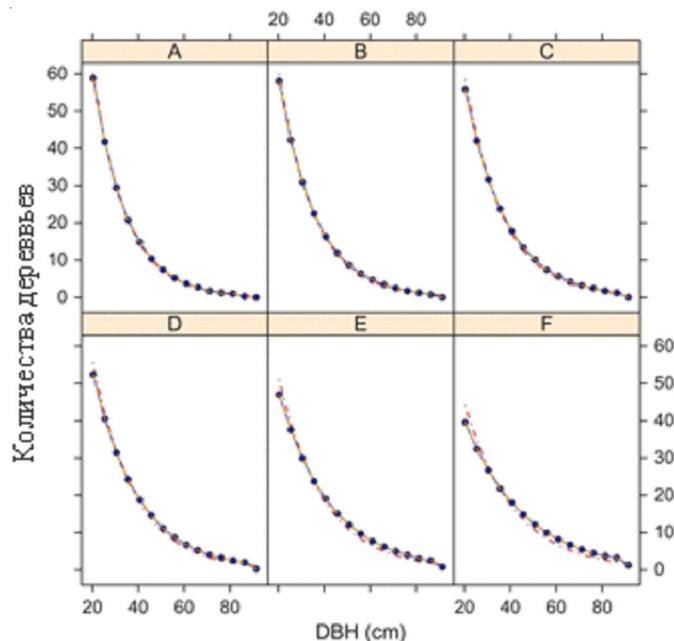


Рис. 3. Кривые зависимости количества деревьев от диаметра этих деревьев

Примечание. Кривые составлены для шести разных лесных участков. Источник: [2].

достигает максимума. Усовершенствование модели Бергаланффи включает:

1. Наложение интегрального ограничительного условия на искомую функцию зависимости диаметра от высоты дерева.
2. Формирование на базе модели Бергаланффи целевого функционала, содержащего искомую функцию.
3. Составление и решение задачи безусловной вариационной оптимизации. Нахождение оптимальной искомой функции.

REFERENCES

1. Crecente-Campo F., Soares P., Tome M., Dieguez-Aranda U. Modelling Annual Individual-Tree Growth and Mortality of Scots Pine with Data Obtained at Irregular Measurement Intervals and Containing Missing Observations. *Forest Ecology and Management*, 2010, vol. 260, pp. 1965-1974.
2. Gove J.H. A Demographic Study of the Exponential Distribution Applied to Uneven-Aged Forests. *Forestry*, 2017, vol. 90, pp. 18-31. DOI: <https://doi.org/10.1093/forestry/cpw042>
3. Löwe R., Sedmíková M., Natov P., Jankovský M., Hejčmanová P., Dvořák J. Differences in Timber Volume Estimates Using Various Algorithms Available in the Control and Information Systems of Harvesters. *Forests*, 2019, no. 10 (5), p. 388. DOI: <https://doi.org/10.3390/f10050388>

4. Mugasha W.A., Bollandas O.M., Eid T. Relationships Between Diameter and Height of Trees in Natural Tropical Forest in Tanzania, Southern Forests. *Journal of Forest Science*, 2013, no. 75 (4), pp. 221-237. DOI: <http://dx.doi.org/10.2989/20702620.2013.824672>
5. Richardson S.J., Smale M.C., Hurst J.M. et al. Large-Tree Growth and Mortality Rates in Forests of the Central North Island, New Zealand. *New Zealand Journal of Ecology*, 2009, vol. 33 (33), pp. 208-215.
6. Sedmak R., Scheer L. Modelling of Tree Diameter Growth Using Growth Functions Parameterized by Least Squares and Bayesian Methods. *Journal of Forest Science*, 2012, no. 58, pp. 245-252.
7. Temesgen H., Zhang C.H., Zhao X.H. Modelling Tree Height-Diameter Relationships in Multi-Species and Multi-Layered Forests: A Large Observational Study from Northeast China. *Forest Ecology and Management*, 2014, vol. 316, pp. 78-89. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.foreco.2013.07.035>
8. Terra M.C., Lima M.G., Santos J.P. et al. Non-Linear Growth Models for Tree Species Used for Forest Restoration in Brazilian Amazon Arc of Deforestation. *Pesquisa Florestal Brasileira*, 2022. DOI: <http://dx.doi.org/10.4336/2022.pfb.42e202102180>
9. Vanclay J.K. Tree Diameter? Height and Stocking in Even-Aged Forests. *Ann. For. Sci.*, 2009, vol. 66, p. 702.
10. Zhao-gang L., Feng-ri L. The Generalized Chapman-Richards Function and Applications to Tree and Stand Growth. *Journal of Forestry Research*, 2013, vol. 14 (1), pp. 19-26.

Information About the Author

Tofik I. Suleymanov, Doctor of Sciences (Engineering), Professor, Deputy Director General, National Aerospace Agency, Akhundova Suleymana Sani St, 1, AZ1115 Baku, Azerbaijan, journalanasa@gmail.com

Hikmet H. Asadov, Doctor of Sciences (Engineering), Professor, Head of the Department, Research Institute of Aerospace Informatics, National Aerospace Agency, Akhundova Suleymana Sani St, 1, AZ1115 Baku, Azerbaijan, asadzade@rambler.ru

Tabriz M. Tahmazov, Doctoral Student, National Aerospace Agency, Akhundova Suleymana Sani St, 1, AZ1115 Baku, Azerbaijan, thmzovtbriz@gmail.com, thmzov66@gmail.com

Информация об авторах

Тофиг Ибрагим оглы Сулейманов, доктор технических наук, профессор, заместитель генерального директора, Национальное аэрокосмическое агентство, ул. Ахундова Сулеймана Сани, 1, AZ1115 г. Баку, Азербайджан, journalanasa@gmail.com

Хикмет Гамид оглы Асадов, доктор технических наук, профессор, начальник отдела НИИ Аэрокосмической Информатики, Национальное аэрокосмическое агентство, ул. Ахундова Сулеймана Сани, 1, AZ1115 г. Баку, Азербайджан, asadzade@rambler.ru

Табриз Мубариз оглы Тахмазов, докторант, Национальное аэрокосмическое агентство, ул. Ахундова Сулеймана Сани, 1, AZ1115 г. Баку, Азербайджан, thmzovtbriz@gmail.com, thmzov66@gmail.com